数理解析研究所講究録
499巻 1983年 78-90

差分方程式における similarity 法

京大工学部　前田　茂 (Shigeru Maeda)

1. 初めに

前世紀の後半に　S. Lie は Lie 群論を創始し　これを応用して微分方程式の解法の統一化を試みた．Lie 群の作用の下で微分方程式が不変（対称）であるとき、常微分方程式では求積によって次数の reduction が行われ、偏微分方程式では特解が得られる．前者に関しては [1] に Lie の仕事が纏められており、偏微分方程式も含めた多くの適用例は　例えば [2] にみることができる．

一方、整数値をとる独立変数に従う常差分方程式に関しても Lie 群の作用に対する不変性（対称性）の概念が導入されている [3]．本報告の目的は、差分方程式が対称性を許容するとき、常微分方程式の場合と同様に reduction が可能であることを示すことである．

初めに　差分方程式の対称性から復習することにする．

$\mathbb{R}^N$のある領域Mで定義された1階差分方程式を考える．

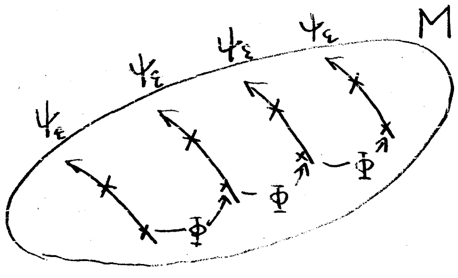
$$x^i_{\tau+1} = \phi^i(x_\tau) \quad \left(\begin{array}{l} i=1,\cdots,N \\ \tau=0,1,\cdots \end{array}\right). \tag{1}$$

ϕ^iも含めて以下現れる関数はすべてC^∞級とする． (1)はM上の写像 $\Phi: x_\tau \mapsto x_{\tau+1}$ を与えている． 任意の $x_0 \in M$ に対して $x_{\tau+1}=\Phi(x_\tau)$で定まるM上の半無限点列 $\{x_\tau\}_{\tau=0,1,\cdots}$ を(1)の解と呼ぶことにする．

つぎに、M上のベクトル場

$$X = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2}$$

を考え、Xの生成するフローをψ_εとする． (1)の任意の解$\{x_\tau\}$及び任意に小さいεに対して点列$\{\psi_\varepsilon(x_\tau)\}_{\tau=0,1,\cdots}$がやはり(1)の解になるとき Xを(1)の対称性作用素と呼ぶ． (1)の対称性作用素の全体をS_Φとかくことにする． 次の命題は[3]に証明されている．



<u>Prop. 1</u>　(2)で与えられるXがS_Φに属するための必要十分条件は 次の関数方程式が成立することである．

$$\xi^i(\phi(x)) = \sum_{j=1}^{N} \xi^j(x) \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j}(x) \quad (i=1,\cdots,N). \tag{3}$$

S_ΦはLie環の構造をもち　これによって差分方程式の許容する対称性群という概念が確定する．　S_Φの構造を調べるには(3)を解いてξ^iを求める必要があるが　(3)を解くことは容易でないことが多い．

対称性作用素の概念は座標系の選択によらないことに注意する．　いま、M上の1つの局所座標系(x^i)によって(1)及び(2)の表現が与えられているとする．　(1)は写像Φの(x^i)による局所表現とみなせる．　別の局所座標系(y^i)を　$y^i = f^i(x)$で導入する．　すると、写像Φは新しい座標近傍上で

$$y^i_{t+1} = f^i(\phi(f^{-1}(y_t))) \equiv \phi^{i\prime}(y_t) \tag{4}$$

とあらわされ、同じく(2)は

$$X = \sum_{i=1}^{N} \xi^{i\prime}(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \xi^{i\prime}(y) = \sum_{j=1}^{N} \xi^j(x)\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

とかける．　(1)と(4)は一般に相異なる差分方程式であるけれども同じ写像を与えるので同一視できる．　このとき(3)も次の意味で座標系の選び方によらない．　ξ, ϕが(3)をみたせばξ', ϕ'も(3)をみたし　逆も成立する．　従って、XがS_Φに属するという性質は　座標系の選択によらない．　以下、我々はこの事実を用いる．

2. 対称性作用素を許容するときの差分方程式の表現

ΦをR^Nのある領域で定義されたN次元1階常差分方程式とし、その局所表現が(1)で与えられているとする．(2)で定まるベクトル場Xが Φの対称性作用素である、つまり (3) が満たされているとする．我々は Xに関連して特殊な局所座標系を捜して Φを解が求め易い形に表現することを考える．

さて、Xは非特異点の近傍で適当な局所座標系 $(y^1, \cdots, y^N)$ によって

$$X = \frac{\partial}{\partial y^1} = \sum_{i=1}^{N} \delta_{i1} \cdot \frac{\partial}{\partial y^i}$$

とあらわせる．y^i は次の方程式を解くことで求まる．

$$X y^1 = 1, \quad X y^2 = \cdots = X y^N = 0, \quad dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^N \neq 0. \qquad (5)$$

この局所座標系における Φの表現が $y^i_{\tau+1} = \phi^{i'}(y_\tau)$ になったとすれば、(3) が成立すればならないことによって $\partial\phi^{i'}/\partial y^1 = \delta_{i1}$ が成り立つ．ゆえに、Φは局所座標系 $(y^1, \cdots, y^N)$ によって

$$y^1_{\tau+1} = y^1_\tau + g^1(y^2_\tau, \cdots, y^N_\tau), \quad y^\alpha_{\tau+1} = g^\alpha(y^2_\tau, \cdots, y^N_\tau) \qquad (6)$$
$$(\alpha = 2, \cdots, N)$$

とあらわされる．

(6)をみると、Φは $y^2, \cdots, y^N$ に関する $(N-1)$次元差分方程式

と、y^1に関して和分操作の可能な　いわば線形化された方程式とで表現されている．若し、(6)の後半の方程式の解が求まれば y^1_t は $y^1_t = \sum_{l=0}^{t-1} g^1(y^\alpha_l) + y^1_0$ として得られる．勿論、座標近傍の覆う範囲に十分注意しなければならない．

Prop. 2　(1)で与えられる Φ が対称性作用素 X を許容するものとする．X の非特異点の近傍において適当な座標系 $(y^1, \cdots, y^N)$ をとれば Φ は(6)の形に表現される．

つぎに、複数個の対称性作用素が許容されるときの Φ の表現について考察しよう．最も簡単なのは平行移動群を許容するときである．s 個の対称性作用素

$$X_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \xi^i_\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (\alpha = 1, \cdots, s) \tag{7}$$

があって次の条件をみたしているとする．

$$[\, X_\alpha,\ X_\beta \,] = 0, \qquad \mathrm{rank}\,(\, \xi^i_\alpha) = s. \tag{8}$$

但し、$[X, Y] = XY - YX$ は交換子積をあらわす．このとき局所座標系 $(y^1, \cdots, y^N)$ があって　$X_\alpha = \partial/\partial y^\alpha$ $(\alpha = 1, \cdots, s)$ と表わされることが知られている．y^i は次の方程式を解けばよい．

$$X_\alpha y^i = \delta^i_\alpha \quad \begin{pmatrix} i=1,\cdots,N \\ \alpha=1,\cdots,s \end{pmatrix}, \quad dy^1\wedge\cdots\wedge dy^N \neq 0.$$

この局所座標系でΦが $y^i_{t+1}=\phi^{i'}(y_t)$ とあらわされているものとすると、(3)によって $\partial\phi^{i'}/\partial y^\alpha = \delta_{i\alpha}$ が成立する．従って、Φは次の形に表現されることになる．

$$\begin{aligned} y^\alpha_{t+1} &= y^\alpha_t + g^\alpha(y^{s+1}_t,\cdots,y^N_t) \qquad (\alpha=1,\cdots,s) \\ y^\varepsilon_{t+1} &= g^\varepsilon(y^{s+1}_t,\cdots,y^N_t) \qquad (\varepsilon=s+1,\cdots,N) \end{aligned} \tag{9}$$

(6)と比較して (9)は $y^{s+1},\cdots,y^N$ だけで閉じた $(N-s)$次元差分方程式と、$y^1,\cdots,y^s$ に関して和分操作の可能なs個の方程式とで表わされている．

条件(8)を少し緩めて可解対称性群も許容するような場合にも同様の事情が成立することをみよう．Φがs個の対称性作用素(7)を許容し、かつ次の条件が満たされるものとする．

$$\begin{aligned} &[X_\alpha, X_\beta] \equiv 0 \quad \mathrm{mod}.(X_1,\cdots,X_l) \quad \begin{pmatrix} l=1,\cdots,s-1 \\ \alpha,\beta=1,\cdots,l+1 \end{pmatrix}, \\ &\mathrm{rank}(\xi^i_\alpha)=s. \end{aligned} \tag{10}$$

このときは、適当な局所座標系 $(y^1,\cdots,y^N)$ によって X_αが次の形にかけることが証明できる．

$$X_1=\frac{\partial}{\partial y^1}, \quad X_\alpha=\frac{\partial}{\partial y^\alpha}+\sum_{\beta=1}^{\alpha-1}\xi_\alpha^\beta(y)\cdot\frac{\partial}{\partial y^\beta} \quad (\alpha=2,\cdots,s)$$

y^iは方程式

$$X_\alpha y^i=\delta_{i\alpha}\left(\begin{array}{l}\alpha=1,\cdots,s\\ i=\alpha,\cdots,N\end{array}\right),\quad dy^1\wedge\cdots\wedge dy^N\neq 0$$

を解いて求める．　この局所座標系を用いて今までと同様の議論を行うと　Φが次の形をしていることがわかる．

$$\begin{aligned} y^\alpha_{\tau+1}&=y^\alpha_\tau+g^\alpha(y^{\alpha+1}_\tau,\ y^{\alpha+2}_\tau,\ \cdots,\ y^N_\tau)\ (\alpha=1,\cdots,s),\\ y^\varepsilon_{\tau+1}&=g^\varepsilon(y^{s+1}_\tau,\ y^{s+2}_\tau,\ \cdots,\ y^N_\tau). \end{aligned} \tag{11}$$

この場合も　$y^{s+1},\cdots,y^N$ に関して閉じた差分方程式が得られ、$y^s,\ y^{s-1},\cdots,y^1$は順次和分操作で解ける形になっている．

<u>Prop. 3</u>　　(1)で与えられるΦがs個の対称性作用素(7)を許容し　それらが条件(8)（又は(10)）をみたしているならば、Φは適当な局所座標系（$y^1,\cdots,y^N$）によって(9)（又は(11)）の形に表わすことができる．

3. N=1の場合

最後に 今までの議論をN=1の場合 つまり1変数差分方程式に適用しよう. $\mathbb{R}$の適当な領域上で定義された差分方程式を考える.

$$\Phi : \qquad x_{\tau+1} = \phi(x_\tau) \tag{12}$$

Φは差分方程式(12)と同時に写像$x \mapsto \phi(x)$も表わすことにする. $X = \xi(x) \cdot d/dx$がΦの対称性作用素であるための条件は Prop. 1 から次の関数方程式が成立することである.

$$\xi(\phi(x)) = \xi(x) \cdot \frac{d\phi}{dx}(x). \tag{13}$$

(13)をみたす$\xi \neq 0$がみつかれば, (5)によって新しい局所座標yを次式で導入する.

$$y = \int \frac{dx}{\xi(x)}. \tag{14}$$

Prop. 2 によれば Φはyの有効領域において 線形方程式

$$y_{\tau+1} = y_\tau + A \qquad (A:\text{定数}) \tag{15}$$

であらわされる.

<u>N.B.</u> 写像の正則点・特異点は写像を表現する座標系

の選択によらない．実際(1)及び(4)で表わされている写像に対して

$$\frac{\partial x^i_{\tau+1}}{\partial x^j_\tau} = \sum_{k,l} \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\right)_{\tau+1} \cdot \left(\frac{\partial y^l}{\partial x^j}\right)_\tau \cdot \frac{\partial y^k_{\tau+1}}{\partial y^l_\tau}$$

であるから $\mathrm{rank}(\partial x^i_{\tau+1}/\partial x^j_\tau) = \mathrm{rank}(\partial y^i_{\tau+1}/\partial y^j_\tau)$．ところで(15)では特異点は現れないので表現(15)は(12)の特異点も含まない領域（のある範囲）で有効である．後程例を用いながら示す．Φの非正則点はξの零点に対応することがある．

(13)を少し変更して次の関数方程式が成立すると仮定する．

$$\eta(\phi(x)) = B\cdot\eta(x)\cdot\frac{d\phi}{dx}(x) \quad \begin{pmatrix} B:\text{定数} \\ B\neq 0,1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

このとき，新しい局所座標zを

$$z = \int\frac{dx}{\eta(x)} \tag{17}$$

で導入すると　その有効領域においてΦは

$$z_{\tau+1} = \frac{1}{B}z_\tau + A \qquad (A:\text{定数}) \tag{18}$$

とあらわされる．このときは $\left(\int\frac{dx}{\eta(x)} - \frac{AB}{B-1}\right)\eta(x)\cdot\frac{d}{dx}$ が対称性作用素を与えることを注意する．

例1　リカッチ方程式を考える．

$$x_{\tau+1} = \frac{c x_\tau + d}{a x_\tau + b} \quad \begin{pmatrix} a, b, c, d:\text{定数} \\ a \neq 0,\ ad - bc \neq 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

(19) を考える領域は特定しないでおく．関数方程式(13)は

$$\xi\left(\frac{cx+d}{ax+b}\right) = \xi(x) \cdot \frac{bc-ad}{(ax+b)^2}.$$

ちょっとした計算で次のような1つの解 ξ が求まる：

$\xi(x) = ax^2 + (b-c)x - d$.　(14) に従って新変数 y を求めると以下のようになる．

(i) $(b-c)^2 + 4ad > 0$ のとき

$$y = \frac{1}{a(x_1 - x_2)} \log\left|\frac{x - x_1}{x - x_2}\right|,\quad \text{但し}\ \xi(x_1) = \xi(x_2) = 0,\ x_1 \neq x_2$$

(ii) $(b-c)^2 + 4ad = 0$ のとき．

$$y = -\frac{1}{a(x - x_1)},\quad \text{但し}\ \xi(x_1) = 0.$$

(iii) $(b-c)^2 + 4ad < 0$ のとき．

$$y = \frac{1}{a\omega} \tan^{-1}\left[\frac{1}{\omega}\left(x + \frac{b-c}{2a}\right)\right],\quad \text{但し，}\ \omega = \sqrt{-\frac{d}{a} - \left(\frac{b-c}{2a}\right)^2}$$

何れの場合も (19) は y に関する線形方程式(15)の形になる．

例2　$J=[0,1]$ 上で定義された差分方程式

$$x_{t+1}=a\,x_t(1-x_t)\quad(a:\text{定数},\ 0<a\leq 4)\tag{20}$$

を考える．(20)に対して関数方程式(16)を適用する．すなわち，

$$\eta(ax(1-x))=B\cdot\eta(x)\cdot a(1-2x)\quad(B\neq 0,1)\tag{21}$$

さて，関数 $\psi(x)=ax(1-x)$ は $x=1/2$ で $\psi'=0$ となる．従って前述のN.B.によって J 全体で(20)を線形方程式の形に表現し直すことはできない．そこで，J の一部で(21)を満たす $\eta(x)$ を捜すことにする．η の候補として $(k\text{次多項式})^{1/k}$ という関数を考えれば，$a=2$ 及び4のときに次のようなものをみつけることができる．

(i) $a=2$ のとき．$\eta(x)=\frac{1}{2}-x$，$B=\frac{1}{2}$．そこで，x の範囲を $0\leq x<1/2$ に制限して(20)を線形化する．

$$z=\int\frac{dx}{\frac{1}{2}-x}=-\log\left(\frac{1}{2}-x\right).\qquad z_{t+1}=2\cdot z_t-\log 2.\tag{22}$$

(22)の一般解を求めて x に戻せば次の解を得る．

$$x_t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}A^{2^t},\quad A=1-2x_0.\tag{23}$$

我々はxを$[0, \frac{1}{2})$に制限して$A>0$の場合を考えたが、$\frac{1}{2} \leq x_0 < 1$つまり$A \leq 0$のときも実は(23)は(20)の解になっている。よって、(23)はJ上の差分方程式(20)の$a=2$のときの解である。

iii) $a=4$のとき。　　$0 < x < \frac{1}{2}$の範囲において、次のような(21)の解がみつかる。

$$\eta(x) = \sqrt{x(1-x)} \quad , \quad B = \frac{1}{2} .$$

(17)に従えば

$$z = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \cos^{-1}(1-2x) \text{、従って } x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos z \tag{23}$$

ここで、(23)を$0 \leq x \leq 1$なるxに対して有効な変換式とみなすと、(20)は次式の如くになる。

$$\cos z_{\tau+1} = \cos(2 z_\tau) \tag{24}$$

いわゆるpiecewise linearな方程式にかき直せる。(24)を$z_{\tau+1} = 2 z_\tau$と表現できる領域についてはN.B.で述べた如く制限があったが、幸いなことに(24)はJ上の差分方程式(20)の書換えである。これから次の解を得る。

$$x_\tau = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(A\cdot 2^\tau), \quad A = \cos^{-1}(1-2x_0) \tag{25}$$

4. 最後に

本報告に現れる対称性作用素を1つの基礎的道具として Hamilton, Lagrange 両古典力学系を差分方程式で記述する試みがなされてきた[3, 4]. 対称性作用素を差分方程式の解の陽的表現を求めるのに応用したものが本報告である. この議論では特殊関数方程式(3)(又は(13), (16))の非自明な解を求める必要がある. 対称性にからんだ様々の議論を差分方程式について行うとき、往々にしてこの種の関数方程式の解を求めたり解の構造を知る必要が生じる. そのための有効な手段は残念ながら少ないように思われる.

REFERENCES

[1] A. Cohen, An introduction to the Lie theory of one-parameter groups, G. E. Stechert, New York, 1931

[2] G. W. Bluman and J. Cole, Similarity methods for differential equations, Springer-Verlag, New York, 1974.

[3] S. Maeda, Canonical structure and symmetries for discrete systems, Math. Japon., 25 (1980), 405-420.

[4] S. Maeda, Lagrangian formulation of discrete systems and concept of difference space, Math Japon., 27 (1982), 336-345.